Série de Problèmes n°3

Fractions, périmètres et PGCD

« La **moitié** de quelque chose » signifie
« diviser par 2 ». Le **tiers** = diviser par 3.

On peut utiliser les fractions dans nos systèmes !

13 problèmes avec solutions

Table des matières

Les fractions dans les problèmes

Vocabulaire des fractions

- La **moitié** de x s'écrit $\frac{x}{2}$. Cela veut dire : $2 \times (\text{la moitié}) = x$.
- Le **tiers** de x s'écrit $\frac{x}{3}$. Cela veut dire : $3 \times (\text{le tiers}) = x$.
- Le **quart** de x s'écrit $\frac{x}{4}$. Cela veut dire : $4 \times (\text{le quart}) = x$.

Astuce pour éviter les fractions

Quand on voit « la moitié de A égale B », on peut écrire :

$$\frac{A}{2} = B \quad \Longleftrightarrow \quad A = 2B$$

Multiplier des deux côtés élimine la fraction !

Exemple

Problème : La **moitié** des billes d'Anna est égale au nombre de billes de Ben. Ben a **3 billes** de plus que Clara. Ensemble, ils ont **29 billes**.

Variables : A = billes d'Anna, B = billes de Ben, C = billes de Clara

Équations :

$$\frac{A}{2} = B \quad \Longrightarrow \quad A = 2B$$
$$B = C + 3$$
$$A + B + C = 29$$

Résolution : De (2) : $C = B - 3$. De (1) : $A = 2B$.

Dans (3) : $2B + B + (B - 3) = 29 \Rightarrow 4B = 32 \Rightarrow B = 8$

Donc $A = 16$, $C = 5$.

Vérification : la moitié de 16 = 8 = B ✓ ; $8 = 5 + 3$ ✓ ; $16 + 8 + 5 = 29$ ✓

Partie A : Et si… ? (avec fractions)

Problème 1 : Les bonbons de Léa, Marc et Nina

Léa, Marc et Nina comptent leurs bonbons.
La **moitié** des bonbons de Léa est égale au nombre de bonbons de Marc. Marc a **4 bonbons** de plus que Nina. Ensemble, ils ont **32 bonbons**.

Combien de bonbons a chacun ?

Problème 2 : L'argent d'Oscar, Pauline et Romain

Oscar, Pauline et Romain comparent leur argent de poche.
Le **tiers** de l'argent d'Oscar est égal à l'argent de Pauline. Pauline a **3 €** de plus que Romain. Ensemble, ils ont **42 €**.

Combien d'argent a chacun ?

Problème 3 : Les autocollants de Sarah, Théo et Ugo

Sarah, Théo et Ugo collectionnent des autocollants.
La **moitié** des autocollants de Sarah égale ceux de Théo. Le **tiers** des autocollants de Théo égale ceux d'Ugo. Ensemble, ils ont **40 autocollants**.

Combien d'autocollants a chacun ?

Problème 4 : Les billes de Victor, Wendy et Xavier

Victor, Wendy et Xavier jouent aux billes.
Le **quart** des billes de Victor est égal au nombre de billes de Wendy. Wendy a **2 fois** plus de billes que Xavier. Ensemble, ils ont **55 billes**.

Combien de billes a chacun ?

Problème 5 : Les livres d'Yasmine, Ziad et Alice

Yasmine, Ziad et Alice comparent leurs livres.
La **moitié** des livres d'Yasmine plus **3** égale le nombre de livres de Ziad. Ziad a **2 fois** plus de livres qu'Alice. Ensemble, ils ont **43 livres**.

Combien de livres a chacun ?

Problème 6 : Les images de Bruno, Clara et Diane

Bruno, Clara et Diane échangent des images.
Le **tiers** des images de Bruno est égal à la **moitié** des images de Clara. Clara a **6 images** de plus que Diane. Ensemble, ils ont **57 images**.

Combien d'images a chacun ?

Problème 7 : L'âge d'Émile, Fatou et Gabriel

Émile, Fatou et Gabriel comparent leurs âges.
La **moitié** de l'âge d'Émile plus **1** égale l'âge de Fatou. Le **tiers** de l'âge d'Émile égale l'âge de Gabriel. La somme de leurs âges est **34 ans**.

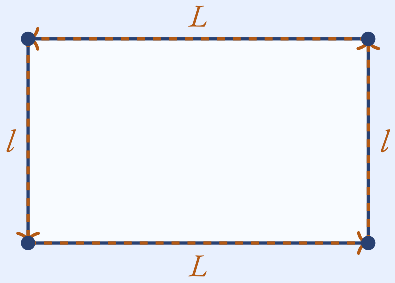
Quel âge a chacun ?

Partie B : Périmètres de rectangles

« La répétition est la mère de l'apprentissage. »
— Proverbe russe

Rappel : périmètre d'un rectangle

Le **périmètre** est la longueur totale du contour — la distance parcourue si on fait le tour complet.



$$P = L + l + L + l$$
$$\downarrow$$
$$P = 2L + 2l$$

Problème 8 : Le jardin de Mamie

Le jardin de Mamie est un rectangle. Sa **longueur** est le **double** de sa largeur. Le **périmètre** du jardin est **36 mètres**.

Quelle est la longueur et la largeur du jardin ?

Problème 9 : La cour de l'école

La cour de l'école est un rectangle. Sa longueur a **10 mètres** de plus que sa largeur. Le **périmètre** est **60 mètres**.

Quelles sont les dimensions de la cour ?

Problème 10 : Le terrain de sport

Un terrain de sport rectangulaire a un périmètre de **54 mètres**. Sa longueur est le **triple** de sa largeur plus **3 mètres**.

Quelles sont les dimensions du terrain ?

Partie C : Plus grand commun diviseur (PGCD)

Définition du PGCD

Le **Plus Grand Commun Diviseur** de deux nombres a et b (noté $\text{PGCD}(a, b)$) est le plus grand nombre qui divise à la fois a et b.

Exemple : Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Les diviseurs **communs** sont : 1, 2, 3, 6.
Le plus grand est **6**, donc $\text{PGCD}(12, 18) = 6$.

Méthode : décomposition en facteurs premiers

Pour trouver le PGCD de deux nombres, on utilise la **décomposition en facteurs premiers** (vue dans la Série n°2) :

1. Décomposer chaque nombre en facteurs premiers.
2. Garder les facteurs **communs** avec le plus **petit** exposant.
3. Multiplier ces facteurs entre eux.

Exemple : $\text{PGCD}(12, 18)$

$12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$

Facteurs communs : 2 (exposant min : 1) et 3 (exposant min : 1).

$\text{PGCD}(12, 18) = 2^1 \times 3^1 = 6$

Problème 11 : Le partage de bonbons

Hugo a **24 bonbons** et **36 chocolats**. Il veut faire des sachets **identiques** contenant le même nombre de bonbons et le même nombre de chocolats, en utilisant **tout** sans reste.

Quel est le plus grand nombre de sachets qu'il peut faire ? Combien y aura-t-il de bonbons et de chocolats dans chaque sachet ?

Problème 12 : Les bouquets de fleurs

Une fleuriste a **28 roses** et **42 tulipes**. Elle veut faire des bouquets **identiques** avec le même nombre de roses et le même nombre de tulipes dans chaque bouquet, en utilisant **toutes** les fleurs.

Quel est le plus grand nombre de bouquets qu'elle peut faire ? Combien de roses et de tulipes dans *chaque bouquet ?*

Problème 13 : Le carrelage

Papa veut carreler un mur rectangulaire de **48 cm** de large et **60 cm** de haut avec des carreaux **carrés** les plus grands possibles, sans découper de carreaux.

Quelle est la taille des carreaux ? Combien de carreaux faudra-t-il ?

Solutions — Partie A

À cacher avant impression

Solution 1 : Les bonbons de Léa, Marc et Nina

Variables : L = bonbons de Léa, M = bonbons de Marc, N = bonbons de Nina
Équations :

$$\frac{L}{2} = M \implies L = 2M$$
$$M = N + 4$$
$$L + M + N = 32$$

Résolution : De (2) : $N = M - 4$. De (1) : $L = 2M$.
Dans (3) : $2M + M + (M - 4) = 32 \Rightarrow 4M = 36 \Rightarrow M = 9$
Réponse : Léa a 18 bonbons, Marc a 9 bonbons, Nina a 5 bonbons

Solution 2 : L'argent d'Oscar, Pauline et Romain

Variables : O = argent d'Oscar, P = argent de Pauline, R = argent de Romain
Équations :

$$\frac{O}{3} = P \implies O = 3P$$
$$P = R + 3$$
$$O + P + R = 42$$

Résolution : De (2) : $R = P - 3$. De (1) : $O = 3P$.
Dans (3) : $3P + P + (P - 3) = 42 \Rightarrow 5P = 45 \Rightarrow P = 9$
Réponse : Oscar a 27 €, Pauline a 9 €, Romain a 6 €

Solution 3 : Les autocollants de Sarah, Théo et Ugo

Variables : S = autocollants de Sarah, T = de Théo, U = d'Ugo
Équations :

$$\frac{S}{2} = T \implies S = 2T$$
$$\frac{T}{3} = U \implies T = 3U$$
$$S + T + U = 40$$

Résolution : De (2) : $T = 3U$. De (1) : $S = 2T = 6U$.
Dans (3) : $6U + 3U + U = 40 \Rightarrow 10U = 40 \Rightarrow U = 4$
Réponse : Sarah a 24 autocollants, Théo a 12 autocollants, Ugo a 4 autocollants

Solution 4 : Les billes de Victor, Wendy et Xavier

Variables : V = billes de Victor, W = de Wendy, X = de Xavier
Équations :

$$\frac{V}{4} = W \implies V = 4W$$
$$W = 2X$$
$$V + W + X = 55$$

Résolution : De (2) : $W = 2X$. De (1) : $V = 4W = 8X$.

Dans (3) : $8X + 2X + X = 55 \Rightarrow 11X = 55 \Rightarrow X = 5$
Réponse : Victor a 40 billes, Wendy a 10 billes, Xavier a 5 billes

Solution 5 : Les livres d'Yasmine, Ziad et Alice

Variables : Y = livres d'Yasmine, Z = livres de Ziad, A = livres d'Alice
Équations :

$$\begin{aligned} \frac{Y}{2} + 3 = Z \quad &\Longrightarrow \quad Y = 2(Z-3) = 2Z - 6 \\ Z = 2A \\ Y + Z + A = 43 \end{aligned}$$

Résolution : De (2) : $A = \frac{Z}{2}$. De (1) : $Y = 2Z - 6$.
Dans (3) : $(2Z - 6) + Z + \frac{Z}{2} = 43 \Rightarrow \frac{7Z}{2} = 49 \Rightarrow Z = 14$
Réponse : Yasmine a 22 livres, Ziad a 14 livres, Alice a 7 livres

Solution 6 : Les images de Bruno, Clara et Diane

Variables : B = images de Bruno, C = de Clara, D = de Diane
Équations :

$$\begin{aligned} \frac{B}{3} = \frac{C}{2} \quad &\Longrightarrow \quad 2B = 3C \\ C = D + 6 \\ B + C + D = 57 \end{aligned}$$

Résolution : De (1) : $B = \frac{3C}{2}$. De (2) : $D = C - 6$.
Dans (3) : $\frac{3C}{2} + C + (C - 6) = 57 \Rightarrow \frac{3C+2C+2C-12}{2} = 57 \Rightarrow 7C - 12 = 114 \Rightarrow 7C = 126 \Rightarrow C = 18$
Réponse : Bruno a 27 images, Clara a 18 images, Diane a 12 images

Solution 7 : L'âge d'Émile, Fatou et Gabriel

Variables : E = âge d'Émile, F = âge de Fatou, G = âge de Gabriel
Équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{2} + 1 = F \quad &\Longrightarrow \quad E = 2(F-1) = 2F - 2 \\ \frac{E}{3} = G \quad &\Longrightarrow \quad E = 3G \\ E + F + G = 34 \end{aligned}$$

Résolution : De (2) : $G = \frac{E}{3}$. De (1) : $F = \frac{E}{2} + 1$.
Dans (3) : $E + \frac{E}{2} + 1 + \frac{E}{3} = 34 \Rightarrow \frac{6E+3E+2E}{6} = 33 \Rightarrow 11E = 198 \Rightarrow E = 18$
Réponse : Émile a 18 ans, Fatou a 10 ans, Gabriel a 6 ans

Solutions — Partie B

À cacher avant impression

Solution 8 : Le jardin de Mamie

Variables : L = longueur, l = largeur
Équations :

$$L = 2l$$
$$2L + 2l = 36$$

Résolution : Dans (2) : $2(2l) + 2l = 36 \Rightarrow 6l = 36 \Rightarrow l = 6$
Réponse : longueur = 12 m, largeur = 6 m

Solution 9 : La cour de l'école

Variables : L = longueur, l = largeur
Équations :

$$L = l + 10$$
$$2L + 2l = 60$$

Résolution : Dans (2) : $2(l + 10) + 2l = 60 \Rightarrow 4l + 20 = 60 \Rightarrow 4l = 40 \Rightarrow l = 10$
Réponse : longueur = 20 m, largeur = 10 m

Solution 10 : Le terrain de sport

Variables : L = longueur, l = largeur
Équations :

$$L = 3l + 3$$
$$2L + 2l = 54$$

Résolution : Dans (2) : $2(3l + 3) + 2l = 54 \Rightarrow 6l + 6 + 2l = 54 \Rightarrow 8l = 48 \Rightarrow l = 6$
Réponse : longueur = 21 m, largeur = 6 m

Solutions — Partie C

À cacher avant impression

Solution 11 : Le partage de bonbons

Méthode : Trouver PGCD$(24, 36)$ par décomposition en facteurs premiers.
Décomposition :

$$24 = 2^3 \times 3 \qquad \text{et} \qquad 36 = 2^2 \times 3^2$$

Facteurs communs avec le plus petit exposant : 2^2 et 3^1.

$$\text{PGCD}(24, 36) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

Nombre de sachets : 12. Contenu : $24 \div 12 = 2$ bonbons et $36 \div 12 = 3$ chocolats.
Réponse : 12 sachets, avec 2 bonbons et 3 chocolats dans chaque sachet
Vérification : $12 \times 2 = 24$ ✓ ; $12 \times 3 = 36$ ✓

Solution 12 : Les bouquets de fleurs

Méthode : Trouver PGCD$(28, 42)$ par décomposition en facteurs premiers.
Décomposition :

$$28 = 2^2 \times 7 \qquad \text{et} \qquad 42 = 2 \times 3 \times 7$$

Facteurs communs avec le plus petit exposant : 2^1 et 7^1.

$$\text{PGCD}(28, 42) = 2 \times 7 = 14$$

Nombre de bouquets : 14. Contenu : $28 \div 14 = 2$ roses et $42 \div 14 = 3$ tulipes.
Réponse : 14 bouquets, avec 2 roses et 3 tulipes dans chaque bouquet
Vérification : $14 \times 2 = 28$ ✓ ; $14 \times 3 = 42$ ✓

Solution 13 : Le carrelage

Méthode : Trouver PGCD$(48, 60)$ par décomposition en facteurs premiers.
Décomposition :

$$48 = 2^4 \times 3 \qquad \text{et} \qquad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Facteurs communs avec le plus petit exposant : 2^2 et 3^1.

$$\text{PGCD}(48, 60) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

La taille des carreaux est 12×12 cm.
Nombre de carreaux en largeur : $48 \div 12 = 4$
Nombre de carreaux en hauteur : $60 \div 12 = 5$
Réponse : carreaux de 12 cm de côté, il en faut $4 \times 5 = 20$ carreaux