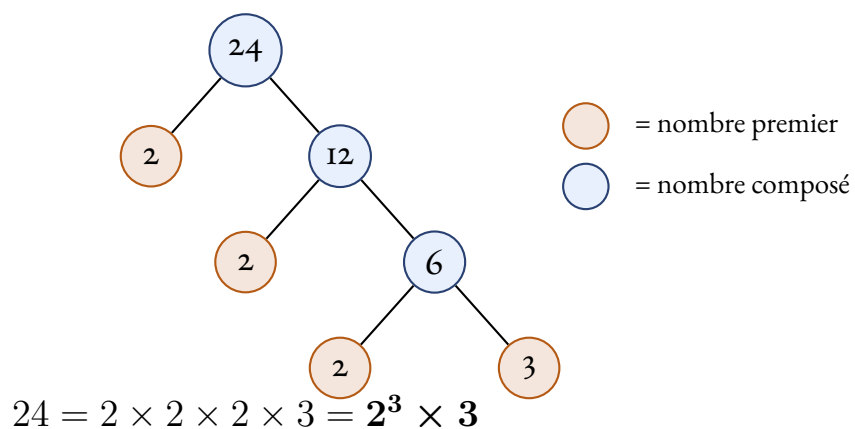


# Série de Problèmes n°2

## *Nombres premiers et systèmes à 3 variables*

Tout nombre entier supérieur à 1 peut s'écrire  
comme un **produit de nombres premiers**.  
C'est sa **décomposition en facteurs premiers**.

**Exemple : décomposer 24**



PARTIE A Décomposition en facteurs premiers

PARTIE B Et si...? (systèmes à 3 variables)

---

## Table des matières

---

<b>Les nombres premiers</b>	<b>2</b>
<b>La décomposition en facteurs premiers</b>	<b>3</b>
<b>1 PARTIE A : Décomposition en facteurs premiers</b>	<b>4</b>
<b>2 PARTIE B : Et si...?</b>	<b>6</b>
<b>Solutions — Partie A</b>	<b>8</b>
<b>Solutions — Partie B</b>	<b>10</b>

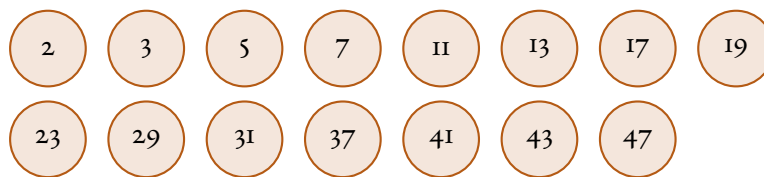
## Les nombres premiers

### Définition

Un **nombre premier** est un nombre entier supérieur à 1 qui n'est divisible que par 1 et par **lui-même**.

### Les premiers nombres premiers

Les nombres premiers inférieurs à 50 sont :



### Remarques importantes :

- **1 n'est pas premier** : par convention, 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.
- **2 est le seul nombre premier pair** : tous les autres nombres pairs sont divisibles par 2.
- Un nombre qui n'est pas premier (et qui est  $> 1$ ) s'appelle un **nombre composé**.

## La décomposition en facteurs premiers

### Théorème fondamental de l'arithmétique

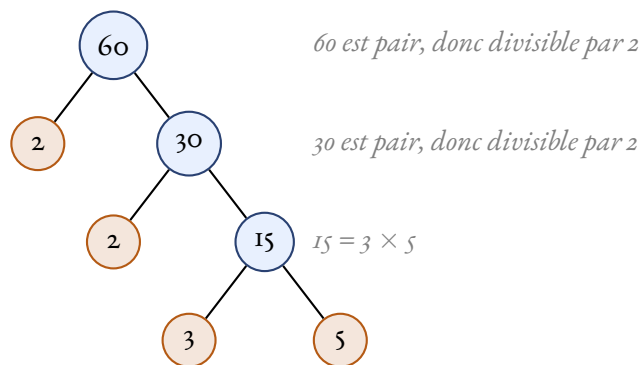
Tout nombre entier supérieur à 1 peut s'écrire de manière **unique** comme un produit de nombres premiers (à l'ordre près des facteurs).

### La méthode de l'arbre

Pour décomposer un nombre, on construit un **arbre de facteurs** :

1. On écrit le nombre à décomposer.
2. On cherche un diviseur premier (commencer par 2, puis 3, puis 5...).
3. On divise et on écrit les deux facteurs.
4. On recommence avec chaque facteur qui n'est pas premier.
5. On s'arrête quand tous les facteurs sont premiers.

### Exemple détaillé : décomposer 60



On collecte tous les nombres premiers (les feuilles de l'arbre) :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$$

**Astuce :** On écrit toujours les facteurs premiers dans l'ordre croissant, avec des exposants pour les facteurs répétés.

**PARTIE A : Décomposition en facteurs premiers****Problème 1**

Décompose **36** en produit de facteurs premiers.

Écriture finale :  $36 =$  \_\_\_\_\_

**Problème 2**

Décompose **45** en produit de facteurs premiers.

Écriture finale :  $45 =$  \_\_\_\_\_

**Problème 3**

Décompose **72** en produit de facteurs premiers.

Écriture finale :  $72 =$  \_\_\_\_\_

**Problème 4**

Décompose **84** en produit de facteurs premiers.

Écriture finale :  $84 =$  \_\_\_\_\_

### Problème 5

Décompose **90** en produit de facteurs premiers.

Écriture finale :  $90 =$  \_\_\_\_\_

## PARTIE B : Et si...?

« La répétition est la mère de l'apprentissage. »

— Proverbe russe

Résous chaque problème en définissant trois variables et en établissant un système de trois équations.

### Problème 6 : Les livres de Diane, Éric et Fatima

Diane, Éric et Fatima comparent leurs collections de livres.

Si Diane avait **6 livres** de plus, elle aurait **2 fois** les livres d'Éric. Si Éric avait **4 livres** de plus, il aurait autant que Fatima. Ensemble, ils ont **42 livres**.

*Combien de livres a chacun ?*

### Problème 7 : Les bonbons de Hugo, Inès et Jules

Hugo, Inès et Jules comptent leurs bonbons.

Si Hugo **triplait** ses bonbons, il aurait autant qu'Inès. Si Inès donnait **7 bonbons** à Jules, ils en auraient autant l'un que l'autre. Ensemble, ils ont **56 bonbons**.

*Combien de bonbons a chacun ?*

### Problème 8 : L'âge de Karim, Lina et Maya

Karim, Lina et Maya comparent leurs âges.

Si Karim avait **5 ans** de plus, il aurait **2 fois** l'âge de Lina. Si Lina avait **2 ans** de plus, elle aurait le même âge que Maya. La somme de leurs âges est **33 ans**.

*Quel âge a chacun ?*

### Problème 9 : Les cartes de Noah, Océane et Paul

Noah, Océane et Paul collectionnent des cartes.

Si Noah **doublait** ses cartes et en ajoutait **6**, il aurait autant qu'Océane. Si Océane avait **8 cartes** de moins, Paul aurait **2 fois** plus qu'elle. Ensemble, ils ont **72 cartes**.

*Combien de cartes a chacun ?*

**Problème 10 : Les économies de Quentin, Rosa et Samuel**

Quentin, Rosa et Samuel économisent de l'argent.

Si Quentin donnait **5 €** à Rosa, elle aurait **2 fois** plus que lui. Si Rosa donnait **5 €** à Samuel, ils auraient la même somme. Ensemble, ils ont **70 €**.

*Combien d'argent a chacun ?*

**Problème 11 : Les points de Théo, Ursule et Victor**

Théo, Ursule et Victor jouent à un jeu de société.

Si Théo avait **9 points** de plus, il aurait autant qu'Ursule. Si Ursule avait **3 points** de moins, elle aurait autant que Victor. Ensemble, ils ont **48 points**.

*Combien de points a chacun ?*

**Problème 12 : Les images de Wendy, Xavier et Yasmine**

Wendy, Xavier et Yasmine collectionnent des images.

Si Wendy **doublait** ses images, elle aurait **4 de plus** que Xavier. Si Xavier avait **8 images** de moins, Yasmine aurait **2 fois** plus que lui. Ensemble, ils ont **56 images**.

*Combien d'images a chacun ?*

**Problème 13 : Les biscuits de Zoé, Adam et Bianca**

Zoé, Adam et Bianca partagent des biscuits.

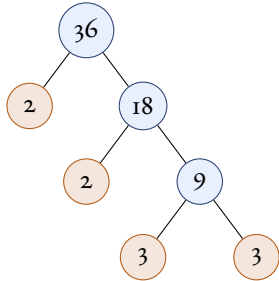
Si Zoé avait **6 biscuits** de plus, elle en aurait autant qu'Adam. Si Adam donnait **5 biscuits** à Bianca, il aurait **la moitié** de ce qu'elle aurait. Ensemble, ils ont **51 biscuits**.

*Combien de biscuits a chacun ?*

## Solutions — Partie A

*À cacher avant impression*

## Solution 1 : Décomposition de 36



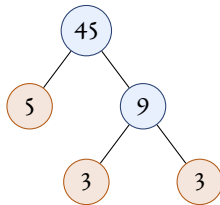
$$36 = 2 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$9 = 3 \times 3$$

$$\text{Réponse : } 36 = 2^2 \times 3^2$$

## Solution 2 : Décomposition de 45



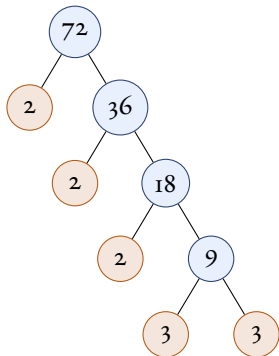
45 n'est pas pair.

$$45 = 5 \times 9$$

$$9 = 3 \times 3$$

$$\text{Réponse : } 45 = 3^2 \times 5$$

## Solution 3 : Décomposition de 72



$$72 = 2 \times 36$$

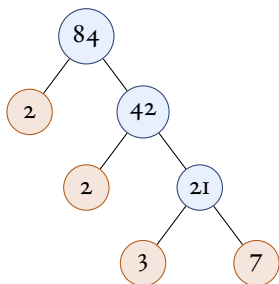
$$36 = 2 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$9 = 3 \times 3$$

$$\text{Réponse : } 72 = 2^3 \times 3^2$$

## Solution 4 : Décomposition de 84



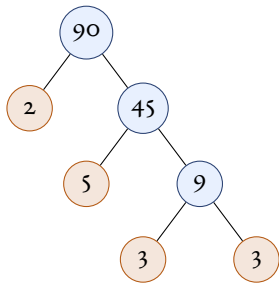
$$84 = 2 \times 42$$

$$42 = 2 \times 21$$

$$21 = 3 \times 7$$

$$\text{Réponse : } 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

Solution 5 : Décomposition de 90



$$90 = 2 \times 45$$

$$45 = 5 \times 9$$

$$9 = 3 \times 3$$

**Réponse :**  $90 = 2 \times 3^2 \times 5$

## Solutions — Partie B

*À cacher avant impression*

### Solution 6 : Les livres de Diane, Éric et Fatima

**Variables :**  $D$  = livres de Diane,  $E$  = livres d'Éric,  $F$  = livres de Fatima

**Équations :**

$$\begin{aligned} D + 6 &= 2E \\ E + 4 &= F \\ D + E + F &= 42 \end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $D = 2E - 6$ . De (2) :  $F = E + 4$ .

Dans (3) :  $(2E - 6) + E + (E + 4) = 42 \Rightarrow 4E - 2 = 42 \Rightarrow 4E = 44 \Rightarrow E = 11$

**Réponse :** Diane a 16 livres, Éric a 11 livres, Fatima a 15 livres

### Solution 7 : Les bonbons de Hugo, Inès et Jules

**Variables :**  $H$  = bonbons de Hugo,  $I$  = bonbons d'Inès,  $J$  = bonbons de Jules

**Équations :**

$$\begin{aligned} 3H &= I \\ I - 7 &= J + 7 \\ H + I + J &= 56 \end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $I = 3H$ . De (2) :  $J = I - 14 = 3H - 14$ .

Dans (3) :  $H + 3H + (3H - 14) = 56 \Rightarrow 7H = 70 \Rightarrow H = 10$

**Réponse :** Hugo a 10 bonbons, Inès a 30 bonbons, Jules a 16 bonbons

### Solution 8 : L'âge de Karim, Lina et Maya

**Variables :**  $K$  = âge de Karim,  $L$  = âge de Lina,  $M$  = âge de Maya

**Équations :**

$$\begin{aligned} K + 5 &= 2L \\ L + 2 &= M \\ K + L + M &= 33 \end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $K = 2L - 5$ . De (2) :  $M = L + 2$ .

Dans (3) :  $(2L - 5) + L + (L + 2) = 33 \Rightarrow 4L - 3 = 33 \Rightarrow 4L = 36 \Rightarrow L = 9$

**Réponse :** Karim a 13 ans, Lina a 9 ans, Maya a 11 ans

### Solution 9 : Les cartes de Noah, Océane et Paul

**Variables :**  $N$  = cartes de Noah,  $O$  = cartes d'Océane,  $P$  = cartes de Paul

**Équations :**

$$\begin{aligned} 2N + 6 &= O \\ P &= 2(O - 8) \\ N + O + P &= 72 \end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $O = 2N + 6$ . De (2) :  $P = 2(O - 8) = 2(2N + 6 - 8) = 4N - 4$ .

Dans (3) :  $N + (2N + 6) + (4N - 4) = 72 \Rightarrow 7N + 2 = 72 \Rightarrow 7N = 70 \Rightarrow N = 10$

**Réponse :** Noah a 10 cartes, Océane a 26 cartes, Paul a 36 cartes

**Solution 10 : Les économies de Quentin, Rosa et Samuel****Variables :**  $Q$  = argent de Quentin,  $R$  = argent de Rosa,  $S$  = argent de Samuel**Équations :**

$$\begin{aligned}R + 5 &= 2(Q - 5) \\R - 5 &= S + 5 \\Q + R + S &= 70\end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $R = 2Q - 15$ . De (2) :  $S = R - 10 = 2Q - 25$ .Dans (3) :  $Q + (2Q - 15) + (2Q - 25) = 70 \Rightarrow 5Q - 40 = 70 \Rightarrow 5Q = 110 \Rightarrow Q = 22$ **Réponse :** Quentin a 22 €, Rosa a 29 €, Samuel a 19 €**Solution 11 : Les points de Théo, Ursule et Victor****Variables :**  $T$  = points de Théo,  $U$  = points d'Ursule,  $V$  = points de Victor**Équations :**

$$\begin{aligned}T + 9 &= U \\U - 3 &= V \\T + U + V &= 48\end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $U = T + 9$ . De (2) :  $V = U - 3 = T + 6$ .Dans (3) :  $T + (T + 9) + (T + 6) = 48 \Rightarrow 3T + 15 = 48 \Rightarrow 3T = 33 \Rightarrow T = 11$ **Réponse :** Théo a 11 points, Ursule a 20 points, Victor a 17 points**Solution 12 : Les images de Wendy, Xavier et Yasmine****Variables :**  $W$  = images de Wendy,  $X$  = images de Xavier,  $Y$  = images de Yasmine**Équations :**

$$\begin{aligned}2W &= X + 4 \\Y &= 2(X - 8) \\W + X + Y &= 56\end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $X = 2W - 4$ . De (2) :  $Y = 2(X - 8) = 2(2W - 4 - 8) = 4W - 24$ .Dans (3) :  $W + (2W - 4) + (4W - 24) = 56 \Rightarrow 7W - 28 = 56 \Rightarrow 7W = 84 \Rightarrow W = 12$ **Réponse :** Wendy a 12 images, Xavier a 20 images, Yasmine a 24 images**Solution 13 : Les biscuits de Zoé, Adam et Bianca****Variables :**  $Z$  = biscuits de Zoé,  $A$  = biscuits d'Adam,  $B$  = biscuits de Bianca**Équations :**

$$\begin{aligned}Z + 6 &= A \\A - 5 &= \frac{B + 5}{2} \\Z + A + B &= 51\end{aligned}$$

**Résolution :** De (1) :  $A = Z + 6$ . De (2) :  $2(A - 5) = B + 5 \Rightarrow B = 2A - 15 = 2Z - 3$ .Dans (3) :  $Z + (Z + 6) + (2Z - 3) = 51 \Rightarrow 4Z + 3 = 51 \Rightarrow 4Z = 48 \Rightarrow Z = 12$ **Réponse :** Zoé a 12 biscuits, Adam a 18 biscuits, Bianca a 21 biscuits